L'épreuve comporte deux exercices et un problème, le tout sur deux pages.

Exercice 1 **4,5 points**

Une urne contient 5 jetons portant les réels : $-\sqrt{2}; -1; 0; 1$ et $\sqrt{2}$. On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. On appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxième jeton et on construit le nombre complexe $z = x + iy$.

1. Combien de nombres complexes peut-on ainsi construire ? [1 pt]
2. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a. Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$? [1 pt]
   b. Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$? [1 pt]
3. On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre complexe de module $\sqrt{2}$. Déterminer la loi de probabilité de X. [1,5 pt]

Exercice 2 **5,5 points**

On considère dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$de l'espace, les surfaces (S) et (S') d'équations respectives $z = (x-y)^2$ et $z = xy$. On prendra 1 cm comme unité.

I. 1. Déterminer le vecteur $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} \wedge (2\vec{k})$. [0,25 pt]

2. On note (I_2) l'intersection de (S') avec le plan (P_1) d'équation $z = 0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (I_2). [0,5 pt]

3. On note (I_3) l'intersection de (S) et de la surface (S'') d'équation $z = -2xy + 4 + 2y^2$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques du projeté orthogonal de (I_3) sur le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. [0,75 pt]

II. (Série C uniquement)

On note (I_4) l'intersection de (S) et de la surface (S'). Dans cette partie, on veut démontrer que le seul point de (I_4) dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0;0;0)$. On suppose qu'il existe un point M appartenant à (I_4) et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O. [0,5 pt]
2. On suppose désormais que l'entier x n'est pas nul.
   a. Montrer que les entiers x et y vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
   En déduire qu'il existe alors deux entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$. [1,25 pt]
   b. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'. [1 pt]
   c. Etablir que $x = 0$ et conclure. [1,25 pt]

III. (Série E uniquement)

$ABCO$ est un tétraèdre régulier d'arête égale à 2. L'arête $[OB]$ est portée par l'axe des ordonnées. C est un point du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$d'abscisse égale à $\sqrt{3}$.

1. a. Faire un schéma. [1 pt]