

EXERCICE 1 : /4 points

1. On considère a et b deux réels, avec a non nul.

Démontrer que les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel, sont des solutions de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ (E). (on admettra par la suite que ce sont les seules).

1pt

2. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

(a) **Affirmation 1** : Si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 6$, alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

1pt

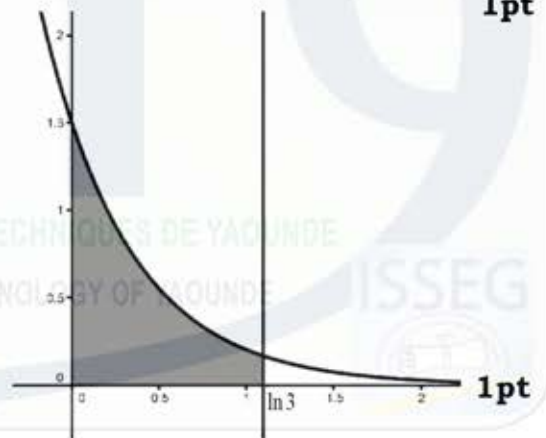
(b) **Affirmation 2** : Si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est solution de l'équation $y' = y$, alors pour tous réels α et β ,
 $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$.

1pt

(c) **Affirmation 3** : La courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\frac{3}{2}$.
(voir figure ci-contre)

L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites

d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 3$, est $\frac{2}{3}$.

**1pt****EXERCICE 2 : /5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overline{OI}, \overline{OJ})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives

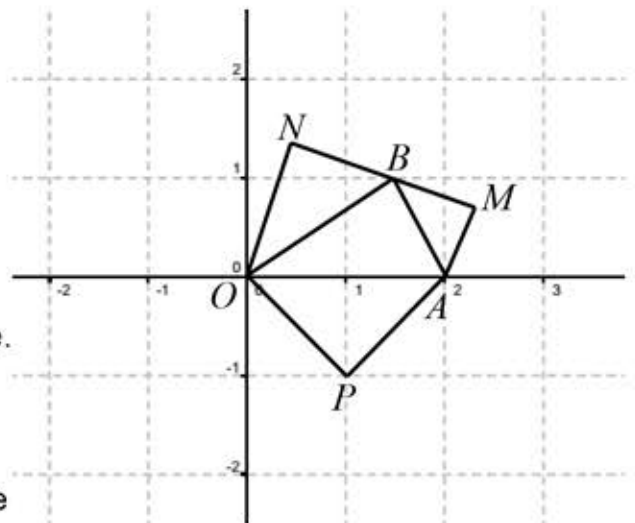
$$z_A = 2 \text{ et } z_B = \frac{3}{2} + i.$$

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-contre.

On note S_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B .

On note S_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N .

Le but de cet exercice est de démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.



1. Donner l'angle et le rapport de S_1 et de S_2 . 2pts
2. (a) En utilisant les résultats de la question 1, donner les écritures complexes de S_1 et S_2 . 1pt
 (b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N . 1pt
 (c) Donner, par lecture graphique, l'affixe z_P du point P , puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires. 1pt

PROBLEME : / 11 points

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A. Etude de la fonction f et construction de la courbe (C).

1. Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{x}xe^x$). 0,5pt
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite Δ . 0,75pt
3. (a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f . 0,5pt
 (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant les limites de la fonction f' en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,75pt
 (c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x . 0,75pt
 (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f . 0,75pt
4. Soit I l'intervalle $[1, 9; 2]$. Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α . 0,75pt
5. Tracer la droite Δ et la courbe (C) (unité graphique : 2 cm). 1pt

B. Recherche d'une approximation de α .

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

1. Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$. 0,5pt
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I . 1,5pt
3. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.
4. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par : $U_0 = 2$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $U_{n+1} = g(U_n)$.
 On déduit de la question B 2. que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I . On ne demande pas de le démontrer.
 (a) Démontrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$. 0,75pt
 (b) En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout n de \mathbb{N}
 $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$. 1pt
 (c) En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite. 0,75pt