Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Session : 2012
Série : C et E
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 h Coefficient : 5(C) ; 4(E)

L'épreuve comporte pour chaque série, deux exercices et un problème.

EXERCICE 1 (série E uniquement) (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; \pi[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1. Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. 1pt
2. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}]$ possède une fonction réciproque g^{-1} dans le même repère que (C). 1pt
3. Soit $y = g^{-1}(x)$.
Montrer que $\sin y = \frac{1}{x}$ et que $\cos y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ 0,75pt
4. En déduire que pour tout x de $]1, +\infty[$, $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 0,75pt
5. En se servant des résultats précédents, calculer $I = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$. 1,5pt

EXERCICE 1 (Série C uniquement) (5 points)

1. Soit N un entier relatif impair. Montrer que $N^2 \equiv 1\ [8]$. 1pt
2. Montrer que si un entier relatif M est tel que $M^2 \equiv 1\ [8]$ alors M est impair. 1pt
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2 = 8y + 1$. 2pts
4. En déduire que la parabole (Γ) d'équation $y = \frac{x^2-1}{8}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan P passe par une infinité de points à coordonnées entières. 1pt

EXERCICE 2 (5points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E):
$z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$, où d est un nombre complexe donné de module 2.

1. a) Vérifier que 2i est une solution de l'équation (E). 0,5pt
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). 1pt
2. Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, M et N d'affixes respectives $2i$, $-i$, $-i + d$ et $-i - d$.
   a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN]. 0,5pt
   b) En déduire que lorsque d varie dans $\mathbb{C}$, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera. 1pt
   c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN. 1pt
   d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A. 1pt

PROBLEME : (10 points)

Le problème comporte trois parties A, B et C. Les parties A et B sont liées.

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + (2\ln 2)\,y' + (\ln 2)^2\, y = 0$.

1\. a) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$. **0,5pt**

b) Déterminer la solution g de (E) vérifiant : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. **0,5pt**

2\. On considère la fonction numérique u définie pour tout réel x par : $u(x) = \dfrac{x}{2^x}$

On note(C) la courbe représentative de u dans un repère orthonormé du plan.

a) Montrer que la fonction dérivée u' est définie sur $\mathbb{R}$ par $u'(x) = (1 - x\ln 2)\, e^{-x\ln 2}$. **0,5pt**

b) Dresser le tableau de variation de u. **1pt**

c) Préciser les branches infinies de (C). **0,5pt**

d) Tracer (C) et sa tangente (T_0) au point d'abscisse 0. **1pt**
(Prendre 2cm comme unité sur les axes des coordonnées).

3\. a) Prouver que u est une solution particulière de l'équation différentielle (E). **0,5pt**

b) En déduire la valeur du nombre réel $(\ln 2)^2 \times \displaystyle\int_0^1 u(x)dx$. **0,75pt**

Partie B :

On définit la suite numérique (V_n) par : $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{2}(V_n + 2^{-n}), \text{ pour tout } n \in I\!N. \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = u(n)$. **0,5pt**

2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k$.

a) Démontrer par récurrence que $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - \dfrac{n+1}{2^n}$, pour tout entier naturel n. **1pt**

b) Calculer la limite de la suite (S_n). **0,5pt**

Partie C :

Dans le plan orienté et muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs

$\vec{e_1} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$; $\vec{e_2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{j}$.

1. Démontrer que $(O\,; \vec{e_1}\ \vec{e_2})$ est un repère orthonormé du plan. **0,5pt**

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation qui transforme $(O\,; \vec{e_1}\ \vec{e_2})$ en $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **0,5pt**

3\. Une conique dans le repère $(O\,; \vec{e_1}\ \vec{e_2})$ a pour équation cartésienne :

$13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}\,XY = 16$.

a) Ecrire l'équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **1pt**

b) En déduire sa nature et son excentricité. **0,75pt**